Hasard et duplicité[43]

Nous mettons en évidence dans cette communication les liens profonds entre la pratique des jeux de hasard et la constitution des probabilités comme discipline mathématique au XVII^e^ siècle. En chemin nous évoquons brièvement les façons fort différentes dont la notion de hasard est perçue par ses « utilisateurs », avant d'entamer le long périple temporel séparant la première loterie centralisée (Loterie de l'École Militaire) sous Louis XV du Rapido de la Française des jeux.

Naissance des probabilités et jeux

À bien des égards, le dé n'est pas seulement l'origine étymologique du mot « hasard »[44], il est aussi directement à l'origine de la naissance du calcul des probabilités. En effet, on semblait s'ennuyer ferme dans les cours royales aux XVI et XVII^e^ siècles, alors pour tuer le temps, que ce soit en Toscane ou à Versailles, on jouait aux dés. On jouait de l'argent évidemment, sinon l'ennui se serait ajouté à l'ennui. Et certains se mettent à réfléchir aux moyens d'être plus malins que les autres. Les deux problèmes qui suivent sont de ces cogitations, et peuvent être considérés malgré leur apparente futilité comme parmi les premiers problèmes de probabilités en tant que tels :

- question du prince de Toscane à Galilée (1554-1642) : les nombres 9 et 10 s'écrivent d'autant de façons différentes comme somme de trois nombres compris entre 1 et 6... Pourquoi, lorsque l'on lance trois dés, leur somme fait-elle plus souvent un total de 10 que de 9 ?
- question du Chevalier de Méré (1610-1685) demandant à son ami Blaise Pascal (1623-1662) : est-il plus probable d'obtenir un 6 (au moins une fois) lors de 4 lancers d'un seul dé qu'un double 6 (au moins une fois) lors de 24 lancers de deux dés (faire sonner les dés) ?

COMMUNICATIONS

43. Ce texte a également fait l'objet d'un article dans la revue Psychotropes 2007, vol. 13, n°3-4, p. 77-96.
44. Hasard : substantif masculin. Mot d'origine arabe (*az-zahr* : le dé) apparu en français via l'espagnol *azar*. A d'abord signifié jeu de dés avant de désigner plus généralement un événement non prévisible, sans cause apparente (les hasards de la vie) et, par extension, le mode d'apparition d'événements de ce type (ex. : En passant par hasard…).

Outre les liens historiques entre probabilités et jeux de hasard, ceci met en évidence le fait que les probabilités en tant que discipline mathématique sont nées relativement tardivement en comparaison d'autres branches, comme la géométrie, l'arithmétique et, dans une certaine mesure l'analyse (théorie des fonctions).

Question du prince de Toscane à Galilée

Lorsque l'on lance trois dés (sous-entendu non pipés et indistinguables), il y a, comme l'avait noté le prince de Toscane, autant de façons d'écrire 9 et 10 comme somme des trois dés. En effet, une façon est alors symbolisée par un triplet croissant de trois chiffres inférieurs ou égaux à 6 dont la somme vaut respectivement 9 ou 10. Or :

$$\begin{aligned} 9 &= 1+2+6 \\ &= 1+3+5 \\ &= 1+4+4 \\ &= 2+2+5 \\ &= 2+3+4 \\ &= 3+3+3 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} 10 &= 1+3+6 \\ &= 1+4+5 \\ &= 2+2+6 \\ &= 2+3+5 \\ &= 2+4+4 \\ &= 3+3+4 \end{aligned}$$

Les résultats possibles au terme du lancer de trois dés peuvent être représentés comme des triplets (ordonnés) de trois nombres compris entre 1 et 6. Il y a donc selon cette façon de compter $6^3 = 216$ sorties possibles. On notera qu'en procédant ainsi chaque dé correspond à une « position » dans le triplet.

Dans le cas d'une somme égale à 9, on obtient donc :

$$\text{Proba(Somme vaut 9)} = \frac{6+6+3+3+6+1}{216} = \frac{25}{216} \approx 0,116$$

En effet, si les trois nombres de la somme sont distincts deux à deux, il y a 3 choix possibles pour le premier dé, deux pour le deuxième, et 1 pour le troisième, soit $6 = 3 \times 2 \times 1$ façons d'obtenir 9 comme somme de ces trois nombres. Si la somme est obtenue comme somme de deux nombres distincts, l'un étant utilisé deux fois, on n'a le choix que de la position du nombre non répété, soit 3 choix possibles. Et si 9 est obtenu comme somme de trois fois le même nombre, il n'y a qu'une façon d'arriver à ce résultat. D'où le résultat obtenu.

Dans le cas de 10, on obtient donc par les mêmes arguments :

$$\text{Proba(Somme vaut 10)} = \frac{6+6+3+6+3+3}{216} = \frac{25}{216} \approx 0,125$$

Le prince de Toscane avait vu juste ! On en déduit aussi qu'il avait lui une intuition instinctive de la loi des grands nombres et surtout beaucoup de temps à perdre...

Question du Chevalier de Méré à Pascal

Lorsque l'on lance quatre dés (non pipés), il y a 6^4 résultats possibles, tous équiprobables. Il est plus aisé de dénombrer les lancers ne comportant aucun 6, c'est-à-dire l'événement contraire, d'où, presque immédiatement :

$$\text{Proba(au moins 6)} = 1 - \text{Proba(aucun 6)} = 1 - \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5}{6^4} = 1 - \frac{625}{1296} \approx 0{,}5177$$

On lance deux dés : $6^2 = 36$ résultats possibles. On lance ces deux dés 24 fois, il y a donc $36^{24} \approx 2{,}245226.10^{27}$ résultats possibles (équiprobables si les dés sont non pipés).

Alors[45] :

$$\text{Proba(au moins un double 6)} = 1 - \text{Proba(aucun double 6)} = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \approx 0{,}4914$$

Forts d'une réponse numérique exacte et précise aux questions qu'ils avaient posées, le Chevalier et le Prince pouvaient engager des paris avec d'autres joueurs sur ces jeux. En pariant systématiquement sur la configuration la plus probable, la loi des grands nombres (et le temps...) leur permettaient de tirer un bénéfice financier du léger biais dont eux seuls avaient connaissance (hormis leurs conseillers mathématiques qui n'étaient sans doute pas dans les parages). L'idée d'une telle stratégie de jeu sous-tend cette fois une intuition de la notion d'espérance mathématique, quantité qui, dans un jeu de hasard, s'exprime comme le produit des gains par leur probabilité d'occurrence, sommé sur tous les gains possibles.

En fait, les jeux de hasard agitaient de façon encore plus profonde les précurseurs des probabilités que sont Pascal et Fermat (1601-1665) puisqu'ils

45. Signalons pour mémoire que, vu les ordres de grandeur en jeu, Pascal a sans doute eu recours aux premières tables logarithmes pour finaliser son calcul... Coup de chance, le mathématicien écossais John Neper (ou Napier, 1550-1617) les avait inventés et tabulés quelques années plus tôt, en 1614. Ce qui fit la fortune... de l'un de ses collaborateurs – qui participa au calcul explicite – qui les diffusa de par le monde (notamment parmi les assureurs, grands consommateurs de calcul, déjà...). La révolution que les logarithmes apportèrent en termes de capacités de calculs à l'époque est en tous points comparable à celle induite par l'invention des ordinateurs ou plutôt celle des micro-ordinateurs diminuant drastiquement le coût des calculs dans une proportion que les contemporains ne pouvaient même pas imaginer quelques années auparavant.

entamèrent à partir de 1654 à l'initiative du premier une longue correspondance initialement motivée par le problème de la répartition des mises et que l'on peut considérer comme les premières contributions théoriques au calcul des probabilités. Ce problème, fort discuté à l'époque, toujours pour les mêmes raisons, consistait à déterminer la répartition équitable des mises entre les participants d'un jeu de hasard lors d'une interruption prématurée de la partie. Au départ, Pascal avait soumis à Fermat une solution qu'il avait apportée au problème. Plusieurs savants éminents de l'époque avaient cru y apporter des solutions qui se révélèrent fausses. En langage moderne – et si l'on raisonne en moyenne – la réponse est immédiate : les mises doivent être réparties au prorata des probabilités que chacun des participants a de gagner à l'instant de l'interruption. Problème : à l'époque, le concept de probabilité restait à inventer. Et effectivement, dans cette correspondance publiée en 1679, la notion de probabilité (comme nombre compris entre 0 et 1) mais aussi d'espérance mathématique sont clairement employées, sans jamais s'extraire cependant d'un contexte numérique. L'origine précise de l'espérance mathématique est elle à trouver dans le texte fameux du pari de Pascal[46]. Son but était de démontrer aux libertins qu'ils avaient en tout état de cause intérêt à croire en Dieu. Le philosophe et mathématicien y introduit le concept fondateur d'espérance mathématique consistant à multiplier un gain (la quantité finie des plaisirs terrestres *versus* la quantité infinie des plaisirs apportées d'une vie paradisiaque et éternelle) par la probabilité que Dieu existe, que l'on peut supposer arbitrairement petite mais que l'on ne peut pas affirmer n'être pas strictement positive, quelle que soit l'intensité de son incroyance.

Quelques dates-clés

Il n'est pas dans notre propos de retracer en détail l'histoire des probabilités mais, brossons-en néanmoins les grandes étapes pour fixer les idées. L'Histoire commence donc par la correspondance Pascal-Fermat à partir de 1654. Puis, première pierre angulaire, la loi (faible) des grands nombres est établie par Bernoulli (Jacques 1er, 1654-1705) et publiée à titre posthume dans l'ouvrage *Ars conjectandi* en 1713. Cette première version de la loi des grands nombres est établie par des méthodes de dénombrement dans le cadre du jeu de Pile ou Face équilibré : Bernoulli démontre que lorsqu'on lance indéfiniment une pièce de monnaie équilibrée, on observe peu à peu que les fréquences d'apparition de pile et de face convergent vers 1/2, probabilité a priori d'obtention de pile ou face. Diverses généralisations auront lieu au fil

46. Dans le recueil des Pensées, pensée n° 233 de l'édition Brunschvig.

du temps jusqu'à la version moderne qui étend ce comportement à la répétition indéfinie et indépendante d'un phénomène aléatoire quelconque.

Le second étage de la fusée probabiliste est ce que les spécialistes appellent de façon particulièrement absconse le théorème central limite qui n'est autre que la description de la vitesse à laquelle les fréquences empiriques s'approchent de la probabilité a priori de l'événement aléatoire reproduit indépendamment. C'est une mesure des fluctuations autour de la moyenne qui se révèle suivre une loi probabiliste appelée (pour cette raison d'ailleurs) loi normale ou gaussienne. C'est Abraham de Moivre qui met le phénomène en évidence, toujours dans le cas du jeu de Pile ou Face équilibré. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) généralisera ce résultat dans le cadre plus général de l'analyse des incertitudes dans les mesures physiques. C'est d'ailleurs dans ce cadre qu'encore aujourd'hui la loi normale est portée à la connaissance de beaucoup d'entre nous, sous la forme d'une séance plus ou moins appréciée de travaux pratiques de Physique consistant à consigner un grand nombre de mesures de la distance focale d'un lentille convergente pour faire apparaître la célèbre courbe en cloche. Les sciences humaines s'en sont aussi emparées, notamment dans les années 1970 avec le livre pour le moins controversé intitulé la « *bell curve* » et qui prétendait démonter à partir de la répartition statistique des résultats obtenus lors de test de QI que les différentes minorités ethniques n'étaient pas dotées de la même intelligence. Ce qui évidemment en disait plus long sur les tests que sur les gens que l'on y soumettait.

D'autres grands contributeurs des probabilités sont apparus au fil des ans, notamment Laplace, Poisson en France, mais, on peut néanmoins marquer la naissance de la théorie moderne des probabilités au début du XX^{e} siècle avec Émile Borel (avec les applications probabilistes de la théorie de la mesure vers 1900) puis Andreï Kolmogorov qui posa aux environs de 1930 les bases axiomatiques du calcul des probabilités tel qu'il existe aujourd'hui.

À propos, le hasard existe-t-il ?

Il s'agit d'une controverse éternelle, qui paradoxalement intéresse peu le probabiliste. Lancer les dés, c'est faire de la mécanique du solide, point de hasard là-dedans, sauf que la sensibilité des dites équations aux conditions initiales est telle qu'il est impossible de contrôler le comportement du dé et qu'une modélisation aléatoire est plus efficace. Au temps des babyloniens, dans la haute Antiquité, les éclipses et les comètes furent un temps considérées comme des phénomènes aléatoires ce que tout détenteur du calendrier des postes peut démentir sans peine aujourd'hui. Fort de ma quarantaine bien tassée, je suis né comme un phénomène aléatoire pour mes parents : ils ignorèrent durant toute la grossesse quel serait le sexe de leur enfant. Échographie aidant, mes enfants ont été des filles et des garçons bien avant de sortir du ventre de leur mère. Dans un autre registre, la mécanique quantique a donné lieu à une controverse de titans quant à son caractère irrémédiablement aléatoire : un électron a-t-il une position au sens commun du terme ou celle-ci est-elle par nature une distribution de probabilité dans l'espace ? L'interprétation de Copenhague de Bohr va dans ce sens quand Einstein proclame « Dieu ne joue pas aux dés » et imagine un système de variables cachées pour cacher cet aléa qu'il ne saurait voir. L'expérience menée par Alain Aspect et son équipe dans les années 1980 tranchera en faveur du premier même si certains ne furent jamais convaincus, de Broglie, notamment.

Autre domaine où chacun de nous peut se poser la question : celui de la reproduction sexuée et de son cortège de spermatozoïdes. Les chanteurs attendris imaginent parfois la conception comme une course bien troussée :

> *De Ruth ou de Moïshé, lequel a eu l'idée ?*
> *Qu'importe j'ai gagné la course, et parmi des milliers*
> *Nous avons tous été vainqueurs, même le dernier des derniers,*
> *Une fois au moins les meilleurs, nous sommes nés.*
> (Bonne idée, JJ Goldman/JJ Goldman, En passant, Columbia, 1998)

Mais pour les généticiens, c'est tout le contraire d'une compétition, c'est une loterie qui a pour fonction de maintenir le réservoir génétique de l'espèce. Le patrimoine génétique d'un être humain est constitué de 23 paires de chromosomes. Chaque cellule sexuelle contient 23 chromosomes (un de chaque paire). Un couple peut donc produire :

$$2^{23} \times 2^{23} = 2^{46} \approx 7.10^{13} = 70\ 000 \text{ milliards de combinaisons}$$

Finalement, cette analogie nous ramène à notre sujet, les jeux de hasard.

Brève histoire de la Loterie

À Gênes, au XVI^{e} siècle, le Conseil de la Cité comporte 90 sénateurs. Cinq d'entre eux sont tirés au sort pour diriger la Cité. Cette règle suscite dans la population des paris sur les notables désignés, les gains étant fonction du nombre de coïncidences avec les sénateurs effectivement désignés.

Bendetto Gentile a l'idée de remplacer les noms par 90 numéros : il crée le premier Loto ! L'extrait simple, l'ambe (double), le terne, le quaterne, la quine sont les noms donnés aux différents niveaux de gain. Il y a donc 43 949 268 combinaisons possibles, et environ une chance sur 4 de gagner quelque chose à ce Loto.

Casanova (de Seingalt) (que l'on ne présente pas) propose l'idée au Contrôleur Général de Boulogne, Ministre de Louis XV qui crée la Loterie de l'école Militaire, le 15 octobre 1757, fédérant et centralisant au profit de l'état central les différentes loteries existant à l'époque en France. Le jeu est « rationnalisé », on ne parie que sur 2 ou 3 coïncidences, soit :

$$\frac{1\,023\,400}{43\,949\,268} \approx \frac{1}{44} \approx \frac{2}{100} \text{ chances de gagner quelque chose}$$

La loterie devient Loterie Royale le 30 juin 1776 sous Louis XVI et marque un retour à la loterie de Benedetto Gentile (fréquence bi-mensuelle). La loterie est supprimée sous la Révolution le 25 Brumaire an II (15.11.1793) pendant la Terreur pour des raisons morales. Puis elle est rétablie en septembre le 9 Vendémiaire an VI (30.09.1797) par le Directoire sous la contrainte budgétaire. Elle prend sans surprise le nom de Loterie Impériale sous l'Empire. Mais elle suscite des détracteurs acharnés (Mirabeau, Necker, Talleyrand...), elle est supprimée en 1835 puis mise hors-la-loi le 21 mai 1836. C'est la première mort de la Loterie. Elle renaît néanmoins de ses cendres le 31 mai par décret ministériel (sous l'égide du Conseiller d'état Henri Mouton), pour prendre, enfin, le nom de Loterie nationale.

Le 1er tirage a lieu le 7 novembre 1933 au Trocadéro. Le gagnant du gros lot (5 millions de francs de l'époque) est coiffeur de Tarascon : Paul Bonhoure avait acheté le bon billet 18414 de la série H. Il s'agit d'une véritable loterie au sens classique du terme : vente de tickets pré-imprimés, par tranches avec des gains croissants en fonction du nombre de chiffres en coïncidence avec le numéro tiré au sort. La Loterie nationale connaît son apogée en 1958, puis décline lentement. Entre-temps, un concurrent redoutable est né : le Tiercé.

Loto national : de la SLNLN à la FDJ

Le Loto national naît le 9 mai 1976, comme jeu d'accompagnement du tirage de la Loterie nationale.

1er tirage : 15-27-31-33-36-48 et 34

Aucun gagnant aux 1er et 2e rangs (voir ci-après, mais deux nombres consécutifs dans le tirage). Ce jeu va marquer un tournant dans la gestion des jeux de hasard et d'argent en France. On va en quelques années passer de la Loterie nationale à vocation socio-compassionnelle (« Gueules cassées »…) à une logique purement économique à base de marketing agressif, fondée sur un matraquage télévisuel sous forme de spots publicitaires bien conçus et de slogans qui se révèlent dévastateurs (« 100 % des gagnants ont testé leur chance »...). Le Loto, c'est un peu la panacée fiscale : on fait payer par les joueurs un impôt volontaire. Tout le monde a des raisons d'être satisfait : l'État engrange, le joueur rêve, et l'abstinent se doit d'être un contribuable reconnaissant puisque d'autres paient ses impôts à sa place (certes en partie seulement).

Et effectivement là, la machine s'emballe, publicité télévisuelle aidant :
• chiffre d'affaire de la Société de la Loterie nationale et du Loto national (SLNLN) en 1976 : 2 jeux et 327 millions d'euros (2,15 milliards de francs) ;

- chiffre d'affaire de la SLNLN en 1987 : 17,5 milliards de francs. Le Loto reste la pièce maîtresse de l'édifice avec 65 % du chiffre d'affaire. La Loterie nationale est comateuse ;
- chiffre d'affaire de la Française des jeux (FDJ) en 2005 : environ 8,9 milliards d'euros (multiplié par 27 depuis 1976) pour 30 jeux.

Entre-temps, la SLNLN a changé de statut, devenant France-Loto en 1989 (société détenue à 72 % par l'État). La mutation était engagée depuis 1988 avec pour but d'améliorer le rendement des activités de jeu pour l'État et d'assouplir l'usage des revenus qu'il en tire (qui étaient auparavant « fléchés » vers diverses grandes causes nationales un peu comme la Vignette automobile dans les premières années). En contrepartie, la société devient peu ou prou une société ordinaire. Pour en savoir plus, on peut se reporter au site de la FDJ[47] qui est intarissable de détails et d'anecdotes sur ses ancêtres et sur elle-même.

En 1989, le premier jeu de grattage est lancé (Cash) avec 100 000 francs comme gros lot à la clé pour une mise de 10 francs. On peut enfin jouer compulsivement comme sur les machines à sous que Charles Pasqua venait juste d'autoriser deux ans auparavant (en 1987) dans les casinos. Le « comme » est sans doute malvenu car il n'y a pas (encore) de casinos à chaque coin de rue.

En 1991, dans la foulée d'un plan social qui divise les effectifs par deux (soit 500 personnes au final), l'entreprise devient la Française des jeux (FDJ). Pour le grand public, l'événement marquant est le lancement du Millionnaire et son « Je passe à la Télé » qui apparaît comme une quintessence, un nirvanah puisque l'on réalise deux rêves à la fois : passer à la Télé et devenir millionnaire (en francs). Auparavant, il a fallu gratter et gratter encore.

Quelques réponses indiscrètes sur le Loto

Pour mieux comprendre les quelques lignes qui suivent, il est utile de savoir que dans une collection de n objets, il y a :

$$C_n^p = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \ldots \times 2 \times 1}$$ façons de choisir p objets en son sein

Ainsi, il y a $C_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ façons de tremper trois doigts dans un pot de confiture.

47. http://www.fdjeux.com/institutionnel/entreprise/histoire/

Règles

Il faut :
- cocher 6 numéros parmi 49 ;
- valider la grille pour un ou deux tirages consécutifs, le mercredi ou le samedi ;
- lors d'un tirage, on tire 6 boules numérotées parmi 49 d'une sphère transparente animée de mouvements gyroscopiques. Puis on tire 1 boule supplémentaire, le numéro complémentaire.

Probabilités de gain

Les rangs :
- Rang 1 : 6 bons numéros (identiques au tirage) ;
- Rang 2 : 5 bons numéros et le numéro complémentaire ;
- Rang 3 : 5 bons numéros ;
- Rang 4 : 4 bons numéros et le numéro complémentaire ;
- Rang 5 : 4 bons numéros ;
- Rang 6 : 3 bons numéros et le numéro complémentaire ;
- Rang 7 : 3 bons numéros.

Tableau I : Résultats par rang

$$\text{Proba(Gagner au rang 1)} = \frac{C_6^6}{C_{49}^6} = \frac{1}{13\,983\,816} \approx 7{,}15.10^{-8}$$

$$\text{Proba(Gagner au rang 2)} = \frac{C_6^5\ C_1^1}{C_{49}^6} = \frac{6}{13\,983\,816} \approx 4{,}29.10^{-7}$$

(Attention au numéro complémentaire !)

$$\text{Proba(Gagner au rang 3)} = \frac{C_6^5\ C_{49-(6+1)}^1}{C_{49}^6} = \frac{252}{13\,983\,816} \approx 1{,}8.10^{-5}$$

$$\text{Proba(Gagner au rang 4)} = \frac{C_6^4\ C_1^1\ C_{42}^2}{C_{49}^6} = \frac{630}{13\,983\,816} \approx 4{,}5.10^{-5}$$

(Attention au numéro complémentaire… *bis* !)

$$\text{Proba(Gagner au rang 5)} = \frac{C_6^4\ C_{42}^2}{C_{49}^6} = \frac{12\,915}{13\,983\,816} \approx 9{,}2.10^{-4}$$

$$\text{Proba(Gagner au rang 6)} = \frac{C_6^3\ C_1^1\ C_{42}^2}{C_{49}^6} = \frac{17\,220}{13\,983\,816} \approx 1{,}23.10^{-3}$$

(Attention au numéro complémentaire… *ter* !)

$$\text{Proba(Gagner au rang 7)} = \frac{C_6^3\ C_{42}^3}{C_{49}^6} = \frac{229\,600}{13\,983\,816} \approx 1{,}64.10^{-2}$$

Il y a : $C_{49}^6 = 13\,983\,816$ combinaisons dont : 260 624 combinaisons gagnantes soit environ :

$\frac{260\,624}{13\,983\,816} \approx \frac{1{,}86}{100}$ chance(s) de gagner… comme à la Loterie Royale sous Louis XVI.

L'espérance de gain brut est de 50 % des mises environ (fluctue à la marge) ; l'espérance de gain net est de 50 euros de perte pour 100 euros misés.

Un détour par les jeux de casino : de 2 à 10 euros de perte moyenne pour 100 euros misés. Dans les jeux casinos, plus la mise unitaire est élevée, plus le taux de retour moyen est élevé. On perd en moyenne plus à la Boule, sorte de roulette qui fait antichambre dans les salles de jeux, qu'à la Roulette.

Quelques expériences de pensée

Pour se représenter les paramètres qui régissent un jeu de hasard et d'argent tel que le Loto, les chiffres bruts ne sont pas parlants. Il faut trouver des analogies avec des événements de la vie. Tentons l'expérience.

On adopte la stratégie suivante : à chaque tirage, on valide deux grilles (distinctes), soit 8 grilles par semaine (2 grilles car cela a longtemps été le minimum réglementaire). Qu'advient-il au fil du temps ?

- temps d'attente moyen du « gros lot » (gain au rang 1) : 336 siècles 17 ères chrétiennes ;
- temps d'attente moyen du « demi-gros lot » (rang 2) : 56 siècles ;
- temps de retour d'une combinaison donnée : 672 siècles.

À titre de comparaisons : un conducteur a 7/10 000 chances de se tuer en voiture dans l'année si bien que, même s'il était biologiquement immortel un automobiliste mourrait en moyenne à 1 400 ans dans un accident de voiture. De même, la probabilité pour une femme de mourir en couches est malheureusement, y compris dans les pays développés, plus de 10 fois supérieure à celle de gagner au Loto au premier rang. Et dire que les joueurs sont souvent superstitieux !

Gagner au Loto à chaque tirage ?

Question : combien doit-on valider de grilles à 6 numéros pour être certain de gagner à chaque tirage ? Question saugrenue ? Les auto-proclamés systémistes en ont inondé les boîtes aux lettres et les kiosques pendant des années de listes de telles grilles-miracles.

Traduction mathématique : quel nombre minimum de combinaisons de 6 numéros doit-on cocher de façon à « contenir » toutes les combinaisons possibles à 3 numéros ? Et comment accéder à ces combinaisons ? Il s'agit en fait d'une question très difficile à résoudre mathématiquement parlant et à dire vraie encore ouverte à ce jour : personne n'a démontré que la meilleure solution connue était optimale. Ce record est de 174 grilles à 6 numéros (voir Pagès, 1999 pour une solution explicite pouvant être mise en œuvre par tout joueur motivé).

Ces officines de prétendus « systémistes » vendent des listes-miracle à 193 puis, étrange coïncidence à 174 numéros, construites à partir d'un chiffre de la chance (l'ensemble pour 300 francs environ à la fin des années 1990, soit 45 euros)... Le chiffre de la chance provient du fait qu'il existe un degré de liberté permettant de décider a priori quel numéro sera le plus souvent utillisé dans la liste de combinaisons.

Détail bon à savoir : lorsque l'on joue une liste à 174 combinaisons « toujours gagnante », on perd en moyenne et comme d'habitude la moitié de ses mises. Sauf que là, on a investi beaucoup (achat de la liste, validation des 174 grilles…).

Revue partielle des succès récents de la FDJ

Gagner à Euromillions

Le dernier avatar majeur de la FDJ en matière de Loto, c'est Euromillions. Un Loto (à double-grille) mais à l'échelle européenne ! Démarré avec trois pays (France, Espagne, Royaume-Uni), il englobe aujourd'hui une bonne partie de l'Europe occidentale sous l'égide de la FDJ.

Il existe cependant une recette infaillible pour gagner à Euromillions que je ne résiste pas à vous livrer ; chacun pourra ainsi faire une bonne action en refilant le tuyau aux accros de son entourage :

• ingrédients : un avion privé, un parachute, l'annuaire téléphonique de l'Allemagne, un papier et un crayon ;

• procédure : s'arrimer au parachute et monter dans l'avion ; décoller et demander de mettre le cap sur l'Allemagne ; choisir au hasard un nom dans l'annuaire ; le noter soigneusement accompagné de son numéro de téléphone sur son papier avec son crayon ; ouvrir à nouveau l'annuaire au hasard et demander au pilote d'ouvrir la porte dans le nombre de minutes correspondantes au numéro de la page que l'on a sous les yeux ; sauter à son signal ; profiter de la chute libre puis ouvrir son parachute ; atterrir, replier son parachute et avancer droit devant soi ; saluer le premier passant que vous croisez, lui demandez poliment son nom et son numéro de téléphone.

Le moment de vérité :

• vous avez de la chance, ce sont précisément les coordonnées que vous aviez notées dans l'annuaire ! Ça y est, c'est arrivé, enfin… vous avez gagné le gros lot à Euromillions !

• pas de chance ! Ce n'était pas lui ! Mais qu'importe, vous reprendrez l'avion la semaine prochaine…

Pour mieux comprendre la recette ci-dessus (y compris son caractère un peu approximatif), il faut se pencher brièvement sur la règle du jeu de l'Euromillions. Elle reste simple bien que comportant deux étages : il faut cocher 5 « cases » parmi 50 et 2 « étoiles » parmi 9. Chaque bulletin comporte donc deux grilles et non une comme au Loto.

Un rapide calcul, analogue à celui détaillé pour le Loto « national », montre qu'il existe donc une combinaison gagnante au tirage pour : 76 275 360 combinaisons distinctes.

D'où la comparaison (approximative) avec l'Allemagne qui compte cependant 81,5 millions d'habitants. Il existe évidemment des gagnants à des rangs inférieurs comme au Loto et dont nous ne parlons pas ici.

Gagner au grattage : le Végas

Le Végas est un jeu de grattage, l'un des gros succès de la FDJ de ces dernières années sur ce créneau. Peu importe la mécanique du jeu, intéressons-nous un instant à la structure des gains.

Principe du jeu

D'après le décret du 12 septembre 2004 :

• un « bloc » est constitué d'un rouleau de 500 000 tickets, réparti en 10 000 bandes de 50 tickets ;

• un ticket est vendu 3 euros (soit 1 500 000 euros le bloc) ;

• il y a 117 197 tickets gagnants dont 7 697 lots significatifs (20 euros dont 1 de 40 000 euros) et 109 500 petits lots (de 3 à 10 euros) ;
• redistribuant 1 020 500 euros, soit 67 % des mises.

Principe d'addiction

Ce jeu, comme tous les autres jeux de grattage, adopte une structure de gains en trois segments, fruit d'un principe marketing dont le but évident est de créer une addiction chez le joueur.

Le gros lot pour le passage à l'acte : on crée l'envie de jouer, généralement à distance (via la télévision, la radio, le journal quotidien ou magazine…) en suscitant du rêve.

Les lots « significatifs » (affichés et commentés sur les lieux d'achat) sont des piqûres de rappel sur site (comme le bruit des jetons qui tombent dans les machines à sous) : ils créent le désir immédiat de jouer en matérialisant sinon dans le temps du moins dans l'espace le rêve de gain.

Les petits lots créent une forme de dépendance compulsive : le joueur rejoue systématiquement son gain jusqu'à la perte de sa mise initiale (la ruine du joueur est le terme probabiliste consacré).

Principe d'optimisation

La loi a introduit il y a quelques années la notion de hasard prépondérant dans la conception des jeux de hasard et d'argent. Il faut rendre hommage à l'auteur de la formule qui frise l'oxymore et ne signifie rien ni pour les probabilistes ni pour les juristes. Pour autant, une telle modification a sans aucun doute dû avoir des conséquences. Par exemple, celle consistant à vouloir mieux répartir les gains « significatifs » sur le territoire à des fins marketing. À cette fin, on peut imaginer le dispositif suivant (encore en cours en février 2006, et semble-t-il modifié depuis) :
• garantir au moins 50 euros par bande en lots (pas forcément petits) ;
• mettre au plus un lot significatif par bande donc dans 7 697 bandes, soit 3 chances sur 4.

Mais que se passe-t-il lorsque le hasard n'est que prépondérant au sens décrit ci-dessus et que l'on constate que la quasi-totalité des joueurs grattent sur place ?

Deux cas de figure peuvent se poser au détaillant :
• que faire du reste d'une bande une fois le lot significatif vendu et gratté ? C'est certes uniquement un dilemme moral pour le détaillant qu'il pourra résoudre à l'occasion du passage d'un joueur inconnu ou en garnissant les pochettes-cadeaux de la FDJ vendus lors des Fêtes ;
• que faire lorsque le lot significatif d'une bande ne sort pas ? Là, c'est un problème de mathématiques (contrôle stochastique)… qui débouche sur un second dilemme : pour détaillant vigilent et patient, retirer la bande après le 31^{e} ticket vendu et gratter pour son compte ; pour détaillant distrait et impatient, retirer la bande après le 42^{e} ticket vendu et gratter pour son compte.

C'est là le résultat d'un calcul probabiliste élémentaire faisant appel à des techniques dites de contrôle stochastique. Le second scénario ne prend pas en compte dans le calcul les petits lots (pour soulager la mémoire du détaillant). Dans les deux cas, le gros lot (40 000 euros) est intégré au calcul ce qui rend peu réaliste la mise en œuvre effective de la stratégie avec les valeurs indiquées. Des valeurs réalistes sont néanmoins calculables par la même méthode sans difficulté particulière. Quoi qu'il en soit, cet avatar du hasard prépondérant illustre parfaitement une règle probabiliste et statistique absolue : toute distorsion du hasard dans un phénomène aléatoire (ici la répartition aléatoire « uniforme » des tickets gagnants) induit pour celui qui possède l'information une possibilité d'en tirer partie.

Soyons clair, point n'est besoin de connaître la nature de la distorsion, il suffit de savoir qu'elle existe. Un bon sens de l'observation, les statistiques (pour déterminer effectivement la nature exacte de la distorsion introduite) et les probabilités (pour en tirer partie) feront le reste.

Le hasard prépondérant n'est pas du hasard, simplement une manipulation hasardeuse.

Loi du Rapido

Tout bistrot est un tripot qui s'ignore !

Sous couvert de lutter contre le jeu clandestin, la FDJ crée en 1999 ce jeu qui n'est autre qu'un vulgaire Loto ayant simplement la particularité de donner lieu à un tirage toutes les 5 minutes. Et on peut valider son bulletin pour une quantité affolante de tirages consécutifs. Une lutte contre le jeu clandestin somme toute redoutablement efficace : le jeu devient l'une de ses vaches à lait et est développé à marche forcée dans toute la France avec une prédilection pour les quartiers populaires. Le profil-type du joueur : un homme, célibataire, ouvrier ou petit employé, souvent attiré aussi par les courses hippiques, capable de valider pour plusieurs dizaines d'euros de grilles chaque jour, voire plus en week-end. Au point que Bercy s'en inquiète en 2005 et demande à la FDJ de mettre la pédale douce.

Et pourtant ils jouent...

Pour terminer sur une note peut-être plus mathématique et plus constructive, on peut tenter de modéliser pourquoi aucun calcul de probabilité ou d'espérance produit par un probabiliste n'a jamais convaincu un joueur de cesser de jouer. En économie en général et en économie mathématique en particulier, on part toujours du principe que l'individu a un comportement rationnel. Il faut donc modéliser cette rationalité du joueur face au jeu ou, de façon duale, modéliser la structure de gain d'un jeu pour en optimiser l'emprise sur le joueur. On peut imaginer schématiquement de procéder comme suit.

Soit G le gain (brut) dans un jeu de hasard et d'argent :
- le joueur ne raisonne pas en « espérance » (en moyenne...) ;
- il est « aimanté » par un risque inversé :

$$\text{Espérance (Gain)} + \lambda \times \text{Variance (Gain)}$$

$\lambda > 0$ cœfficient d'attraction propre à chaque individu ou, par souci d'homogénéité,

$$\text{Espérance (Gain)} + \lambda \times \text{Écart-type (Gain)}$$

- le joueur joue si « son λ » est strictement supérieur à celui du jeu, noté λ_V, et déterminé par :

$$\text{Espérance (Gain)} + \lambda_V \times \text{Écart-type (Gain)} = \text{Mise}$$

Exemple : Le Végas (Mise = 3 euros)
- Espérance (Gain) = 2,041 euros
- Écart-type (Gain) = 22 851
- $\lambda_V \geq 4.20\ 10^{-5}$

On peut dans un second temps envisager de se lancer dans une comparaison des λ_J des autres jeux de grattage, de tirage et classer ces différents λ_J. Puis, pourquoi ne pas vérifier si l'hypothèse d'un λ propre à chaque joueur est cohérente en l'interrogeant sur les jeux auxquels il envisage de jouer et ceux auxquels il n'est pas tenté de jouer ?

En conclusion, cette communication peut laisser croire que l'auteur conçoit une acrimonie particulière contre la Française des jeux et qu'il saisit chaque occasion de la vilipender, dans un brouet de considérations mathématico-moralisantes. Cette impression est en fait le fruit d'un état de fait : la FDJ bénéficie d'un monopole dans l'organisation des jeux de hasard et d'argent (hors casinos), donc dispose de fait du monopole des jeux de masse à destination du grand public. Si le joueur va au casino, il est indubitable que la Française des jeux va au joueur au travers de son omniprésence publicitaire et sponsorisante. Et c'est ce qui fait toute la différence, pas seulement morale. Or, à l'origine, ce monopole était, au moins officiellement, justifié par le constat que le jeu d'argent étant un « vice » chevillé à l'âme (de certains...), il était vain de vouloir le prohiber, un peu comme l'alcool, le tabac ou la prostitution, et qu'en conséquence, il était du rôle de l'État de le réguler au mieux de l'intérêt général, au profit des causes qui le méritent. Le comportement marketing agressif adopté cyniquement par la FDJ ces vingt ou trente dernières années a fait tomber le masque : elle cherche simplement et par tous les moyens l'argent là où il se trouve, sans trop s'embarrasser de scrupules en chemin... La notion de hasard prépondérant introduite dans les règlements régissant la conception des jeux en a constitué l'un des plus notables dérapages, mal contrôlé comme la suite l'a montré. À mon sens, l'apogée marketing du système a été atteint par le lancement puis le développement à marche forcée du Rapido.

Mais les temps changent. Bruxelles s'intéresse depuis peu aux jeux de hasard et d'argent dans le cadre de sa politique de régulation et la FDJ voit les nuages s'amonceler au-dessus de son monopole, alors qu'elle a perdu à peu près toute crédibilité comme régulateur des jeux de hasard et d'argent en France. De nouveaux opérateurs tentent, sans (trop) de succès à ce jour, de pénétrer le marché français, grâce à la répression active menée par l'État à leur encontre. La FDJ réagit en arguant de sa vertu – on parle ici d'opérateur de jeux « responsable » – et de ses efforts d'auto-limitation (*self-containment* !) : ainsi, elle vient tout juste d'interdire l'accès à ses jeux aux mineurs. Ceci laissera sans doute perplexes les naïfs qui croyaient qu'il en avait toujours été ainsi. Des commissions sont créées, des études lancées, la FDJ coopère sans barguigner, finance à l'occasion et se penche en mère fouettarde sur le Rapido. Un tel revirement peut prêter à sourire et suggère plus Tartuffe qu'Alceste. Pour autant, ce qui se profile actuellement en France en matière de rupture de monopole des jeux fait penser à Pandore, juste au moment où il retrouve sa boîte.

Gilles Pagès
Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires
UMR-CNRS 7599, Université Pierre et Marie Curie, Paris

BIBLIOGRAPHIE

BERNOULLI J. Ars conjectandi. Ouvrage posthume publié à Bâle par Thurnisii fratri (1713). Rééd. En allemand in Die Werke von Jakob Bernouilli, vol. 3, Bâle, Birkhäuser Verlag, 1975

PAGÈS G, BOUZITAT C. En passant par hasard. Vuibert, Paris (1re éd. 1999 ; 3e éd. 2003)

PASCAL B. Pensées (pensée n°233 de l'édition Brunschvicg). Œuvre posthume, 1670. Hachette, Paris, 1897